MODELO INPUT-OUTPUT DE LEONTIEF: TEORÍA DE GRAFOS FRENTE A ESTRUCTURAS PRETOPOLÓGICAS

Mª Emilia García Pérez
Mª Elisa Amo Saus
Departamento de Economía y Empresa
Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen:

Las relaciones intersectoriales presentes en el Modelo Input-Output han sido objeto de numerosos análisis matemáticos. En una primera etapa, y debido a su propio planteamiento como un sistema de ecuaciones lineales, W. Leontief y su escuela, haciendo uso del álgebra lineal y el cálculo matricial, consiguieron computar el vector de producciones totales a partir del vector de demandas finales.

Posteriormente, autores como *Kuhn (1956)* ó *R. Dorfman, P. Samuelson y R. Solow (1958)* emplearon técnicas de programación lineal en la resolución del modelo.

Más tarde, *C. Ponsard (1969)* y *R. Lantner(1974)*, entre otros, profundizaron en el análisis estructural del modelo Input-Output, mediante técnicas de grafos, asignándole un grafo de transferencia.

En las VIII Jornadas de ASEPUMA, nosotras mismas, siguiendo el planteamiento de *M. Mougeot, G. Duru y J. P. Auray (1977)*, expusimos cómo ciertas relaciones de interdependencia definidas entre las ramas de producción inducían unas estructuras pretoplógicas que permitían determinar su propensión a comprar o vender al resto.

Analizados en profundidad estos dos últimos métodos de análisis, descubrimos grandes analogías en ambos planteamientos en sus aportaciones al estudio de las relaciones de interdependencia en el modelo, y que ahora tratamos de exponer brevemente.

Palabras clave: Interdependencia. Input-Output. Grafos. Pretoplogías.

1.-INTRODUCCIÓN.

La economía interindustrial se ocupa del análisis de la interdependencia de las unidades de producción y consumo en una economía moderna[1]. En particular, estudia las interrelaciones que existen entre los productores en su doble carácter de compradores de sus producciones mutuas, como consumidores de recursos y como vendedores a los consumidores finales.

Gracias a los actuales adelantos teóricos, junto a las enormes facilidades del cálculo mecánico debido a los actuales y modernos ordenadores y a las cada día más extensas y perfectas disponibilidades estadísticas, han surgido nuevos modelos interindustriales. En este sentido, el Análisis Input-Output del profesor W. Leontief, ha demostrado ser, a lo largo del tiempo, uno de los instrumentos más capaces de describir y analizar la estructura de producción de un entorno económico determinado.

Enumerar y dar alguna información de las diferentes técnicas que aplicadas a dicho modelo, permiten un análisis de las relaciones de interdependencias sería una tarea muy laboriosa, sobre todo teniendo en cuenta que es un modelo de amplia difusión. Sin embargo, en la búsqueda de algunas de estas técnicas, sí que nos fijamos concretamente en dos: una porque consideramos que permitía representar el conjunto de ramas de producción y las transacciones de compra y de venta entre ellas de una forma muy intuitiva, que podemos adelantar que está basada en la teoría de grafos; y otra, porque utilizando unas estructuras matemáticas sencillas, llamadas espacios pretopológicos, ofrecían la posibilidad de establecer una jerarquización de las ramas, una vez que se ha predeterminado una cierta relación binaria entre ellas.

Pero es que además, al investigar las aportaciones de ambos enfoques al estudio de las relaciones de interdependencia en el modelo, nos dimos cuenta de que, aunque desde un punto de vista teórico o de fundamentos eran distintas, guardaban grandes similitudes a la hora de tratar los diferentes aspectos que eran objeto de nuestro análisis. Y este hecho era consecuencia de que en ambas alternativas era fundamental la posibilidad de analizar la interdependencia entre las ramas definiendo unas ciertas relaciones binarias – *influencia* y *dominancia* - , que en su momento serán incorporadas a este trabajo.

2.-FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO INPUT-OUTPUT. LA RELACIÓN DE INFLUENCIA.

Debido a su gran difusión, es bien sabido que este modelo supone una economía como un sistema de n ramas productoras todas y cada una de ellas de un solo bien. La producción total de la rama i, i = 1, 2, ..., n, representada por X_i, es utilizada en parte por otras ramas, incluida ella misma, como consumos intermedios, representados por X_{ij}, i, j = 1, 2, ..., n; y en parte como demandas finales, que escribimos como Y_i, i = 1, 2, ..., n.

Introduciendo una hipótesis básica y fundamental de proporcionalidad, según la cual los insumos que cada rama j toma de otra rama i, son proporcionales a la producción total de j, el modelo admite la siguiente formulación matricial:

$$X = (I - A)^{-1} Y$$

que corresponde al <u>modelo de demanda</u> ó <u>modelo vertical</u> donde A es la matriz de coeficientes técnicos e (I – A) recibe el nombre de matriz de Leontief.

También supone que la producción total de cada rama i es igual a la suma de los insumos comprados al resto de ramas y a sí misma, más los insumos primarios de dicha rama y que representamos por V_i. Esta hipótesis origina una nueva formulación matricial que escribimos como sigue:

$$X^t = V^t (I - D)^{-1}$$

que corresponde al <u>modelo de oferta</u> ó <u>modelo horizontal</u> y D es la matriz de coeficientes de distribución.

Es evidente que bajo este planteamiento, las ramas de producción aparecen relacionadas mútuamente. Esta interrelación se basa en la existencia, en mayor o menor cuantía, de transacciones de compra y venta que unen directa y/o indirectamente a cada rama con el resto. Para modelizar todos estos flujos de bienes y servicios recogidos en una Taba de Entrada-Salida (TES) y poder dar una interpretación más completa acerca del grado de integración de una rama en toda la estructura de producción, introducimos una relación llamada **relación de influencia**.

Así, en general, decimos[2] que la rama productiva i influye a la rama productiva j si una variación en la producción total de la rama i genera una variación en la producción de la rama j.

Esta definición puede hacerse en términos absolutos o relativos a la producción total de cada rama, y en términos directos o globales según se tengan en cuenta los flujos de compra y venta directas o globales; si bien nos centraremos sólo en términos relativos puesto que las variaciones relativas suelen ser a menudo más útiles que las absolutas.

Por tanto, la **influencia directa relativa de la rama i sobre la rama j**, denotada por $i^{D}_{i\to j}$, es el incremento relativo en la producción de la rama j cuando se produce un aumento relativo de la producción de la rama i, es decir,

$$i^{D}_{i\to j} = \frac{\Delta X_j / X_j}{\Delta X_i / X_i}$$

Se puede demostrar[3] que **la rama i influye directamente en términos relativos a la rama j**, y escribimos i i^D j, si $d_{ji} \neq 0$, donde d_{ij} representa el i,j-esimo coeficiente de distribución; es decir, si la rama i compra directamente a la rama j.

Por el propio desarrollo de la matriz Π como suma de potencias

$$\Pi = (I-D)^{-1} = I + D + D^2 + D^3 + ...$$

ocurre que si se tienen en cuenta las transacciones directas e indirectas, podemos afirmar que **la rama i influye globalmente en términos relativos a la rama j**, i i^G j si $\pi_{ji} \neq 0$; siendo π_{ij} el i,j-esimo coeficiente de la matriz Π .

3.-GRAFO DE INFLUENCIA ASOCIADO AL MODELO INPUT-OUTPUT.

Un **grafo**[4] es un par G=(X,f) compuesto por

1.-Un conjunto X finito de puntos llamados **vértices, nudos o polos**.

2.-Una correspondencia f: X ------> X.

El par (x_i, x_j) con $x_j \in f(x_i)$ se llama **arco**. Un **bucle** es un arco de la forma (x_i, x_i). Estos conceptos proporcionan una nueva definición de grafo, al quedar completamente determinado si se conocen sus polos y arcos; es decir, un grafo G es un par G=(X,U) donde U es el conjunto finito de arcos entre sus elementos.

Precisamente estos arcos se corresponden con los pares ordenados de la relación binaria $\Re$ que se puede establecer entre los elementos de un conjunto donde previamente se he definido un grafo. Y recíprocamente, si tenemos un conjunto X y una relación binaria definida entre sus elementos siempre es posible construir un grafo G = (X,U) donde los arcos de U son exactamente los pares ordenados del producto X×X. Es decir:

$$\forall\, x_i, x_j \in X \qquad\qquad x_i \,\Re\, x_j \iff x_j \in f(x_i)$$

Un **grafo valuado** es un grafo G=(X,U) en el que cada arco está provisto de un valor. Los arcos de un grafo valuado pueden venir valorados de muy distintas maneras. En particular, nos centramos en grafos donde sus arcos están valorados mediante los coeficientes de un sistema de ecuaciones.

Así, un **grafo de transferencia** es una terna G=(X,f,h) donde los vértices $x_i \in X$ i =1, 2,......, n representan las n variables de un sistema de ecuaciones algebráicas, f viene determinada a través de las relaciones entre las variables y h es una aplicación definida como sigue:

$$h: \{\ (x_i,x_j) \in X\times X \quad / \quad f(x_i) = x_j\ \} \text{---------}> \mathbf{R}$$

con $h(x_i,x_j) = h_{ji}$. Esta aplicación h representa la valoración de los arcos. Se trata, por tanto, de un grafo valuado asociado a un sistema de ecuaciones algebráicas y cuyos arcos están valorados con los parámetros de esas ecuaciones.

La correspondencia entre grafo y ecuación sigue una norma básica: toda variable independiente está representada por el vértice inicial de un arco cuyo vértice final representa la variable dependiente, y dicho arco viene valuado por el coeficiente de la variable independiente.

De esta forma, a la estructura de intercambios de una TES se le pueden asociar diferentes grafos según la relación binaria entre las ramas. Sea E el conjunto de ramas de producción de una economía, distinguimos, pues

1.-El **grafo de influencia relativa directa** $G_1 = (E, f_1, H_1)$ donde la relación binaria que subyace es $R_1 = i^D$ y tal que la valoración de los arcos viene dada por la aplicación H_1 como sigue:

$$H_1\,(i,j) = d_{ji} \quad \forall\, i,j \in E$$

Así, la representación gráfica será como sigue:

$$i \bullet \xrightarrow{\quad d_{ji} \quad} \bullet\, j$$

2.-El **grafo de influencia relativa global** $G_2 = (E, f_2, H_2)$ donde la relación ue subyace es, como su nombre indica, $R_2 = i^G$ y tal que la valoración de los arcos viene dada por la aplicación H_2 como sigue:

$$H_2\,(i,j) = \pi_{ji} \quad \forall\, i,j \in E$$

Gráficamente, quedará como sigue:

$$i \bullet \xrightarrow{\ \pi_{ji}\ } \bullet\, j$$

4.-PRETOPOLOGÍA INDUCIDA POR LA RELACIÓN DE INFLUENCIA.

Sean E un conjunto y una aplicación a: $\wp(E) \dashrightarrow \wp(E)$. Decimos que el par (E,a) es un **espacio pretopológico o pretopología**[5] si se cumple que:

1.- $a(\emptyset) = \emptyset$

2.- $\forall\, A \subset E$ ocurre que $A \subset a(A)$

A la aplicación *a* se le llama **aplicación adherencia** o simplemente adherencia y se dice que *a induce una pretopología sobre E*. Además, $\forall A \subset E$ al conjunto a(A) se le llama adherencia de A, denotado también por $\overline{A}$.

En *García Pérez (1999, capítulo 3)* puede verse cómo una relación binaria definida entre los elementos de un conjunto cualquiera, induce una estructura pretopológica en dicho conjunto. Ahora vamos brevemente a exponer cómo la relación concreta de influencia de Lantner puede inducir dos pretopologías en el conjunto de ramas de producción de una economía.

El siguiente desarrollo puede hacerse con cualquiera de las relaciones de influencia. Aquí lo haremos con la relación de influencia directa.

Sea E el conjunto de ramas de una economía y sea $i \in E$, consideramos el conjunto siguiente

$$B_i^{i^D} = \{\, j \in E \ / \ i\ i^D\ j \,\} \cup \{\, i \,\} = \{\, j \in E \ / \ d_{ji} \neq 0 \,\} \cup \{\, i \,\}$$

que representa para la rama i, el conjunto de ramas j de E que venden directamente a la rama i, junto con la propia rama i .

La aplicación adherencia “ a_{i^D} ” es tal que

$$\forall i \in E \quad a_{i^D}(i) = \{ j \in E \ / \ i \in B_i^{i^D} \} \cup \{ i \} = \{ j \in E \ / \ d_{ij} \neq 0 \} \cup \{ i \}$$

En estas condiciones, para una rama i, la adherencia es el conjunto de ramas j de E que compran directamente a i; junto con la propia i. Y para cualquier conjunto A de ramas, se puede comprobar que la adherencia de A es el conjunto de ramas j que compran directamente al menos, a una rama i perteneciente al conjunto A, junto con las ramas de A.

Ahora dada una rama $i \in E$, consideramos el conjunto siguiente:

$$B'^{\,i^D}_i = \{ j \in E \ / \ j \, i^D \, i \} \cup \{ i \} = \{ j \in E \ / \ d_{ij} \neq 0 \} \cup \{ i \}$$

que representa el conjunto de ramas j de E que compran directamente a la rama i; junto con la propia rama i.

Por razonamientos análogos ocurre que (E, a'_{i^D}) es la pretopología de los ascendientes inducida por la relación de influencia directa y ahora va a permitir detectar el grado de integración de una rama por su mayor o menor capacidad de vender al resto.

5.-ANÁLISIS COMPARATIVO DE AMBOS PLANTEAMIENTOS TEÓRICOS.

En los apartados anteriores hemos desarrollado muy brevemente y por separado, cómo dos conceptos matemáticos diferentes –grafos y pretopologías- permiten abordar el análisis de las relaciones de interdependencia en la estructura de producción de una economía. Hacemos ahora un estudio simultáneo que muestra cómo las diferentes etapas de tal análisis pueden ser acometidas bajo uno y otro marco teórico. Para ello queremos adelantar que, en su momento, tendremos que ir introduciendo nuevos conceptos necesarios para alcanzar este objetivo.

Las relaciones directas son analizadas en términos de grafos a través de los semigrados exterior e interior[6], que representan para una rama i, el nº de ramas a las que compra y vende directamente i, respectivamente.

Y a su vez coinciden con el cardinal de la adherencia de una rama i en los espacios pretopológicos de ascendientes y de descendientes, respectivamente inducidos por la relación de influencia directa.

Un camino entre dos polos es una sucesión de arcos y la distancia entre dos vértices es la longitud del camino más corto que los une. Entonces, las matrices de caminos y de distancias asociadas al grafo de influencia permiten detectar los senderos por donde se transmite la influencia, a la vez que se cuantifican su importancia económica gracias a la valoración de sus arcos.

Las relaciones indirectas son analizadas en el contexto pretopológico calculando la adherencia de la adherencia de la adherencia sucesivamente de una rama i, teniendo en cuenta que ahora no se hace elemento a elemento sino con conjuntos de ramas.

Las relaciones estrictas sólo pueden ser abordadas en términos de grafos, a partir del estudio de componentes fuertemente conexas, formadas por aquellas ramas mutuamente influidas. Y con el grafo reducido obtenido al considerar cada una de esas componentes como una sola rama y analizando las relaciones de causalidad entre ramas que no pertenecen a la misma componente.

Un circuito es un camino que empieza y termina en el mismo vértice. Cada uno de ellos forma una subestructura interdependiente y su análisis ayuda a conocer los senderos de transmisión circular de influencia.

El análisis de estructuras interdependientes es abordado en términos de grafos mediante la investigación de circuitos , que son caminos con igual extremo inicial y final; con índices de separación y centralidad que permiten estudiar la tendencia de una rama a comprar y/o vender al resto por la posición que ocupan en toda la estructura de producción y a través del grado de cohesión de una rama, que es el nº de veces en que ésta es paso obligado de una transacción de compra y venta.

Finalmente, una y otra metodología ofrece la posibilidad de analizar estructuras interdependientes definiendo una nueva relación binaria, llamada dominancia, de forma que en general, una rama i domina a una rama j si la influencia de i sobre j es mayor que la de j sobre i.

Como existen diferentes definiciones de la relación de influencia, en términos absolutos o relativos y directos o globales, existen otras tantas definiciones de relación de dominancia. Así, en términos económicos, podemos decir que la rama i domina directamente a la rama j si la cantidad de producto que la rama i compra directamente a la rama j representa una mayor proporción en la producción total de la rama j, que el porcentaje que representa la cantidad de producto que la rama i vende directamente a la rama j, en la producción total de i.

Consecuentemente, podemos hablar de grafos de dominancia, según la relación binaria utilizada; aunque no son grafos valuados, sino grafos orientados o digrafos de forma que el extremo inicial indica la rama dominante y el extremo final, la rama dominada. Considerando los semigrados exterior e interior de cada rama, podemos saber la tendencia de cada rama a comprar o vender al resto, en el caso de influencias recíprocas.

Paralelamente, cualquiera de las relaciones de dominancia, induce las pretopologías de descendientes y de ascendientes y así, ocurre que estos semigrados coinciden de nuevo, para cada rama, con los cardinales de las adherencias en ambas estructuras.

Finalmente, conviene subrayar que cuando construimos cualquier grafo de influencia de Lanter o cualquiera de las pretopologías inducidas, hasta ahora hemos considerado todas las transacciones iguales, independientemente de su valor y del porcentaje que representan en el total de sus respectivas producciones.

Pero si queremos describir la estructura de producción diferenciando lo fundamental de lo accesorio, necesitamos elegir un criterio que nos asegure la "calidad" de estas transacciones. Y en este sentido, hacemos una breve incursión en lo que se conoce como Análisis Cualitativo Input-Output.

En términos cualitativos se dice que en general una rama i influye a una rama j si $h_{ji} \geq s$ donde s es un valor que se llama filtro y $H=(h_{ij})_n$ es cualquier matriz del modelo Input-Output.

En este sentido, introducimos una nueva **relación** binaria **de influencia al umbral s**, de forma que se dice que una rama i influye al umbral s a una rama j si y solo si una variación unitaria en la producción de la rama i provoca una variación en la producción de la rama j igual ó superior al s%[7].

Entonces, se puede construir el grafo de influencia directa al umbral s tal que existe el arco (i,j) si y solo si $d_{ji} \geq s$. Y esta relación de influencia al umbral s induce la pretopología de los descendientes donde la adherencia de una rama i está formada por aquellas ramas tales que le compran directamente a la rama i en cantidades que representan en su producción total un porcentaje igual ó superior al s%. Análogamente con la pretopología de ascendientes.

Como conclusión presentamos el siguiente cuadro que resume todo los razonamientos hechos hasta ahora:

GRAFOS		**PRETOPOLOGÍAS**

Relaciones directas

$d^+(i)$ = nº de ramas que venden a i = card (a'_{i^D} (i))

$d^-(i)$ = nº de ramas que compran a i = card (a_{i^D} (i))

Relaciones indirectas

- Matriz de caminos — a (a(i)), a (a(a(i))) , etc
- Matriz de distancias

Relaciones estrictas

- Componentes fuertemente conexas:
  estudio del grafo reducido

Análisis de estructuras interdependientes

- Circuitos geodésicos
- Centralidad y anticentralidad
- Grado de cohesión de una rama[8]
- Relación de dominancia — Idem

i domina a j $\Leftrightarrow$ $i_{i \to j} > i_{j \to i}$

Análisis Cualitativo Input-Output

i influye directamente a j al umbral s (i_s^D) $\Leftrightarrow$ $d_{ji} \geq s$

Grafo de influencia directa al umbral s — Espacios pretopológicos

(E, $a_{i_s^D}$) y (E, $a'_{i_s^D}$)

6.-BIBLIOGRAFÍA.

- AUJAC, H. (1960): "La hierarchie des industries dans un tableau des echanges interindustriels". *Revue Economique*, nº 2, pp. 169-238.

- AURAY, J. P. (1978): "Elements de pretopologie". *Documento de trabajo nº 18,* Université de BesanÇon.

- AURAY, J. P., DURU, G. y MOUGEOT, M. (1977): "Une analyse pretopologique des phenomenes de domination". *Congres international sur le theme de la regulation,* p. 5-10 Décembre, I.S.M.E.A. París.

- BELMANDT, Z. (1993): *Manuel de prétopologie*. Ed. Hermes, París.

- BERGE, C. (1985): *Graphs*. Ed. North Holland. Nueva York.

- GARCÍA PÉREZ, M. E. (1999): "Estructuras pretopológicas versus grafos de transferencia: una aplicación al análisis de interdependencias de la economía española". Tesis Doctoral. Departamento de Economía y Empresa. Universidad de Castilla-La Mancha.

- GARCÍA PÉREZ Y AMO SAUS (2000): "Análisis pretopológico de las relaciones de interdependencia en el modelo input-output de Leontief". *VIII Jornadas de ASEPUMA*. Sevilla, 2000.

- GUERRERO Y CONTRERAS: "Aplicación de la teoría de grafos al análisis input-output: Andalucía 1995. *VIII Jornadas de ASEPUMA*. Sevilla, 2000.

- KAUFMANN, A. (1976): *Puntos y flechas. Teoría de grafos.* Ed. Marcombo. Barcelona.

- LANTNER, R. (1974): *Théorie de la dominance économique*. Ed. Dunod, París.

- LEONTIEF, W. (1973): *Análisis económico input-output*. Ed. Ariel, Barcelona.

[1] Chenery y Clark (1963, edición en español).

[2] Lantner (1974).

[3] García Pérez (1999) p. 74.

[4] C. Berge (1966) o A. Kaufmann, (1976).

[5] Auray, J.P.(1978).

[6]En general, el semigrado exterior de un vértice x_i, $d^+(x_i)$ es el número de arcos cuya extremidad inicial es x_i. Y el semigrado interior $d^-(x_i)$ es el número de arcos donde x_i es la extremidad final.

[7] Como siempre, puede hacerse en términos absolutos y relativos, directos y globales y únicamente se diferencia en que el correspondiente coeficiente sea mayor o igual que s.

[8] Un circuito geodésico entre dos ramas es el circuito de longitud mínima entre esas ramas. Los conceptos de centralidad y anticentralidad están ligados al número de pasos máximo y mínimo respectivamente, que hay que recorrer para llegar de una rama a otra. Y el grado de cohesión de una rama indica el número de caminos en los que una rama es paso obligado. No hacemos más hincapié en ellos, puesto que no tiene su concepto equivalente en pretopologías.